УДК 517.95

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В ЦЕЛОМ ПО ВРЕМЕНИ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С помощью точных оценок фундаментального решения для вырождающегося параболического уравнения и априорных оценок в классах Гельдера доказана разрешимость в целом по времени двухфазной задачи Стефана. Свободная граница принадлежит классу $C^{1+\alpha}$

В работе [1] доказано существование обобщенных решений задачи Стефана для вырождающихся уравнений. В [2] показано, что в случае одной геометрической переменной свободная граница при некоторых условиях гладкости на данные задачи удовлетворяет условию Липшица. В [3] нами предложен аналитический аппарат для доказательства существования классического решения задачи Стефана (в этом случае свободная граница принадлежит классу $C^{1+\alpha}$), однако разрешимость была получена только при малом времени. В настоящей работе получены необходимые априорные оценки решения, позволяющие продолжать его на любой интервал времени.

1. Постановка задачи и основной результат. В двухфазной задаче Стефана требуется найти функции $\rho(\tau)$, $\tau \in (0, T)$ (свободную границу) и $u_i(y, \tau)$, $i = 1, 2$, определенные соответственно в областях $\Omega_T^{(1)} = \{(y, \tau) : -l_1 < y < \rho(\tau),\ \tau \in (0, T)\}$ и $\Omega_T^{(2)} = \{(y, \tau) : \rho(\tau) < y < l_2,\ \tau \in (0, T)\}$, по условиям

$$b_i(u_i)\frac{\partial u_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = 0, \quad (y, \tau) \in \Omega_T^{(i)}, \quad i = 1, 2;$$

$$u_i((-1)^i l_i, \tau) = \varphi_i(\tau), \quad (-1)^i \varphi_i(\tau) \geqslant m_i > 0, \quad i = 1, 2;$$

$$u_i(y, 0) = u_{0i}(y), \quad (-1)^i u_{0i}(y) > 0,\ y \neq 0,\ \rho(0) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} + c_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}(\rho(\tau), \tau) - c_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}(\rho(\tau), \tau) = 0,\ u_i(\rho(\tau), \tau) = 0,$$

где l_i, $c_i = \mathrm{const} > 0$, $b_i(u)|u|^{-\alpha_i} = g_i(u) \in c^1(R)$, $\alpha_i \in [0, 1)$, $|\ln g_i(u)| + |g_i'(u)| \leqslant A_1$.

ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1993. Вып. 5.

Введем пространства функции $H_\alpha^{2+\beta,\frac{2+\beta}{q}}(\bar Q_T)$, $q = 2+\alpha$, $Q_T = \{(x, t) : x \in [0, l],\ t \in [0, T]\}$, которые получаются замыканием множества бесконечно дифференцируемых функций $u(x, t)$ по норме $(\beta < \alpha)$

$$\|u\|_{\alpha,2+\beta} \equiv \max_{\bar Q_T}|u| + \langle u\rangle_{t,Q_T}^{\left(\frac{2+\beta}{q}\right)} + |u_{xx}|_{Q_T}^{(\beta,\beta/q)} + |x^\alpha u_t|_{Q_T}^{(\beta,\beta/q)} < \infty,$$

и пространства $H_\alpha^{1+\beta,(1+\beta)/q}(\bar Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{\alpha,1+\beta} \equiv \max_{\bar Q_T}|u| + \langle u\rangle_t^{\left(\frac{1+\beta}{q}\right)} + \langle u_x\rangle_x^{(\beta)}.$$

Пространства $\overset{\circ}{H}{}^{l,l/q}(\bar Q_T)$ определяются аналогично тому, как это сделано в [5, гл. III].

Пусть $\chi(x) \in C^\infty[-l_1, l_2]$, $\chi(0) = 1$, $\chi((-1)^i l_i) = 0$, $\chi'(0) = 0$, $|\chi'(x)| \leqslant \min \frac{1}{l_i - \varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 > 0$ будет уточнено ниже. Исходная задача Стефана с помощью замены переменных $(y, \tau) = e_\rho(x, t)$:

$$y = x + \rho(t)\chi(x), \quad \tau = t,$$

сводится к задаче в фиксированной области. Введем обозначения

$$\nabla_\rho = (1 + \rho(t)\chi'(x))^{-1}\frac{\partial}{\partial x},\ h_\rho = -\chi(x)(1 + \rho(t)\chi'(x))^{-1}\rho_t,$$

$$u_i(x, t) = u_i(y, \tau)\circ e_\rho(x, t), \quad Q_T^{(i)} = \{(x, t) : 0 < (-1)^i x < l_i,\ t \in (0, T)\}.$$

Тогда в переменных (x, t) исходная задача примет вид

$$L_i(u_i, \rho)u_i \equiv b_i(u_i)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + h\rho\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \nabla_\rho^2 u_i = 0,\ (x, t) \in Q_T^{(i)},$$

$$u_i(l_i(-1)^i, t) = \varphi_i(t),\ u_i(x, 0) = u_{0i}(x),\ \rho(0) = 0,\ u_i(0, t) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} + c_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - c_2\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) = 0.$$

Пусть в задаче (1) выполнены условия согласования до первого порядка включительно:

$$\varphi_i(0) = u_{0i}((-1)^i l_i),\ u_{0i}(0) = 0,\ b_i(u_{0i}((-1)^i l_i))\varphi_i'(0) =$$
$$= u_{0i}''((-1)^i l_i), \quad u_{0i}''(0) = 0.$$

Теорема 1. Предположим, что $|\varphi_i|^{(1+\beta_i/q_i)} \leqslant A_1$, $u_{0i}'(0) > 0$, $q_i = 2 + \alpha_i$, $|u_{0i}|^{(2+\beta_i)} \leqslant A_1$. Тогда для любого $T > 0$ существует единственное решение задачи (1), причем $\rho(t) \in C^{1+\min\frac{1+\beta_i}{q_i}}([0, T])$, $u_i(x, t) \in H_{\alpha_i}^{2+\beta_i,(2+\beta_i)/q_i}(\bar Q_T^i)$.

Доказательство этой теоремы будет дано в п. 4.

2. Разрешимость краевой задачи для вырождающегося квазилинейного уравнения в фиксированной области. Рассмотрим в области Q_T задачу

$$b(u_x, u, x, t)u_t - a_1(u_x, u, x, t)u_{xx} - a_2(u_x, u, x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$
$$u(0, t) = 0,\ u(l, t) = \varphi(t),\ u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $b(u_x, u, x, t) = u^\alpha a_0(u_x, u, x, t)$, $\alpha > 0$, $q \equiv 2 + \alpha$,

$\varphi(t) \in C^{1+\beta/q}([0, T])$, $u_0(x) \in C^{2+\beta}([0, l])$, $u_0'(0) > 0$, $\varphi(t) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, $u_0(x) > 0$ при $x > 0$.

Пусть выполняются условия согласования до первого порядка включительно: $u_0(l) = \varphi(0)$, $u_0(0) = 0$, $b(u_0'(l); u_0(l), l, 0) - a_1(u_0'(l), u_0(l),$

$l, 0) u_0''(l) - a_2(u_0'(l), u_0(l), l, 0) = 0, \; -a_1(u_0'(0), 0, 0, 0) u_0''(0) - a_2(u_0'(0), 0, 0, 0) = 0.$

Пусть, кроме того, функции $a_i(p, u, x, t)$ обладают свойствами

$$\varepsilon_0 \leqslant a_0, \quad \delta_0 \leqslant a_1 \quad \text{при} \quad (p, u, x, t) \in \overline{D} \times \overline{Q}_T, \quad D = (-\infty, \infty) \times$$

$$\times [0, \infty), \quad |||a_i||| \equiv \sup_{\overline{D}} |a_i|_{\overline{Q}_T}^{(\beta, \beta/q)} + \langle a_i \rangle_u^{(\beta)}, \quad \overline{D} \times \overline{G}_T +$$

$$+ \left\langle u \frac{\partial a_i}{\partial u} \right\rangle_u^{(\beta)}, \quad \overline{D} \times \overline{Q}_T + \sup_{\overline{D} \times \overline{Q}_T} \left| \frac{\partial a_i}{\partial p} \right| \leqslant C, \quad i = 0, 1, 2.$$

Решение задачи (2) будем искать в виде $u_0(x) + v(x, t)$, так что $v(x, t)$ будет удовлетворять условиям

$$b(u_0' + v_x, u_0 + v, x, t) v_t - a_1(u_0' + u_x, u_0 + v, x, t) v_{xx} = a_3(v_x, v, x, t),$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = \varphi_1(t) \equiv \varphi(t) - \varphi(0), \quad v(x, 0) = 0, \tag{3}$$

где $a_3(v_x, v, x, t) = a_1(u_0' + v_x, u_0 + v, x, t) u_0'(x) + a_2(u_0' + v_x, u_0 + v, x, t)$.

В шаре B_r с центром в нуле в пространстве $\overset{0}{H}{}_\alpha^{1+\beta, \frac{1+\beta}{q}}(\overline{Q}_T)$ рассмотрим оператор $G: v \to V$, где $V(x, t)$ — решение задачи (3), в коэффициентах которой $v(x, t)$ — заданная функция. Обозначим $I_v(x, t) = \int_0^1 [u_0'(\Theta x) + v_{\theta x}(\theta x, t)] \, d\theta = (u_0(x) + v(x, t))/x$ и покажем, что для $v \in B_r$ при достаточно малом r

$$0 < \mu \leqslant I_v(x, t) \leqslant C(r). \tag{4}$$

При малых $x \in [0, \delta_1]$ в силу свойств $u_0(x)$, $u_0'(x) \geqslant \varepsilon_1 > 0$ для некоторого ε_1. Поэтому при $r = 1/2\varepsilon_1$ и для таких x неравенство (4) выполнено. Если же $x \in [\delta_1, l]$, то так как $\min\limits_{[\delta_1, l]} u_0(x) \equiv m_1 = m_1(\delta_1) > 0$ имеем $I_v(x, t) = (u_0(x) + v(x, t))/x \geqslant l^{-1} m_1/2$ при $r = 1/2m_1$. Так как оценка сверху в (4) очевидна, полагая $r = 1/2 \min\{\varepsilon_1, m_1\}$, получаем оценку снизу в (4) при $\mu = \min\{\varepsilon_1/2, m_1/2l\}$.

Представим $b(u_0' + v_x, u_0 + v, x, t)$ в виде

$$b = x^\alpha I_v^\alpha(x, t) a_0(u_0' + v_x, x I_v(x, t), x, t) \equiv x^\alpha b_v(x, t).$$

Из определения $I_v(x, t)$ и неравенства (4) следует, что

$$|I_v^\alpha|_{\overline{Q}_T}^{(\beta, \beta/q)} \leqslant C(\mu, \alpha)(|u_0|^{(2+\beta)} + \|v\|_{\alpha, 1+\beta}). \tag{5}$$

Кроме того, в силу заданных свойств гладкости функции a_0 $|a_0 \times (u_0' + v_x, x I_v(x, t), x, t)|_{\overline{Q}_T}^{(\beta^2, \beta^2/q)} \leqslant C(1 + \|v\|_{\alpha, 1+\beta})$, следовательно,

$$|b_v(x, t)|_{\overline{Q}_T}^{(\beta^2, \beta^2/q)} \leqslant C(1 + \|v\|_{\alpha, 1+\beta}). \tag{6}$$

Пусть теперь $v_1, v_2 \in B_r$. Тогда

$$\Delta a_0 \equiv a_0(u_0' + v_{2x}, x I_{v_2}, x, t) - a_0(u_0' + v_{1x}, x I_{v_1}, x, t) =$$

$$= (v_{2x} - v_{1x}) \int_0^1 a_{0p}(u_0' + \omega v_{2x} + (1 - \omega) v_{1x}, x I_{v_2 \omega + (1-\omega) v_1}, x, t) \, d\omega +$$

$$+ (I_{v_2} - I_{v_1}) \int_0^1 \frac{1}{I_{\omega v_2 + (1-\omega) v_1}} (x I_{\omega v_2 + (1-\omega) v_1}) a_{0u}(u_0' + \omega v_{2x} +$$

$$+ (1 - \omega) v_{1x}, x I_{\omega v_2 + (1-\omega) v_1}, x, t) \, d\omega.$$

Из этого представления, заданных свойств гладкости функций $u a'_{0u}$, a'_{0p} и неравенства (4) легко получаем

$$|\Delta a_0|_{Q_T}^{(\beta^2,\beta^2/q)} \leqslant C(r)\|v_2 - v_1\|_{\alpha,1+\beta}$$

и, следовательно,

$$|b_{v_2}(x,t) - b_{v_1}(x,t)|_{Q_T}^{(\beta^2,\beta^2/q)} \leqslant C(r)\|v_2 - v_1\|_{\alpha,1+\beta}. \tag{7}$$

Аналогично (7) получаются неравенства

$$|a_i(u'_0 + v_x, u_0 + v, x, t)|_{Q_T}^{(\beta^2,\beta^2/q)} \leqslant c(1 + \|v\|_{\alpha,1+\beta}), \quad i = 1, 3, \tag{8}$$

$$|a_i(u'_0 + v_{2x}, u_0 + v_2, x, t) - a_i(u'_0 + v_{1x}, u_0 + v_1, x, t)|_{Q_T}^{(\beta^2,\beta^2/q)} \leqslant$$
$$\leqslant C(r)\|v_2 - v_1\|_{\alpha,1+\beta}, \quad i = 1, 3, \quad v, v_1, v_2 \in B_r. \tag{9}$$

На основании теоремы 1 в [3] и оценок (5) — (9) заключаем, что оператор G действует из $B_r \subset \overset{0}{H}{}_\alpha^{1+\beta,\frac{1+\beta}{q}}(\bar{Q}_T)$ в пространство $H_\alpha^{2+\beta^2,\frac{2+\beta^2}{q}}$ и обладает свойствами

$$\|Gv\|_{\alpha,2+\beta^2} \leqslant C(r), \tag{10}$$
$$\|Gv_2 - Gv_1\|_{\alpha,2+\beta^2} \leqslant C(r)\|v_2 - v_1\|_{\alpha,1+\beta}.$$

Так как по определению $G\; Gv \in \overset{0}{H}{}_\alpha^{1+\beta,\frac{1+\beta}{q}}$, то из (10) и неравенства

$$|u|^{(l,l/2)} \leqslant CT^{\frac{l_1-l}{2}}|u|^{(l_1,l_1/2)}, \quad 0 < l < l_1, \tag{11}$$

следуют оценки

$$\|Gv\|_{\alpha,1+\beta} \leqslant C(r)T^{\frac{1+\beta^2-\beta}{q}}, \tag{12}$$

$$\|Gv_2 - Gv_1\|_{\alpha,1+\beta} \leqslant C(r)T^{\frac{1+\beta^2-\beta}{q}}\|v_2 - v_1\|_{\alpha,1+\beta}. \tag{13}$$

Для T достаточно малых, $T \leqslant T_0(|u_0|^{(2+\beta)}, u'_0(0), m_1)$, в силу (12) и (13), оператор G удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений в B_r. Это доказывает следующую лемму.

Лемма 1. При сделанных предположениях о данных задачи (2) она имеет единственное решение $u(x, t) \in H_\alpha^{2+\beta,\frac{2+\beta}{q}}$.

Пусть коэффициенты a_i уравнения задачи (2) зависят от некоторого параметра σ, являющегося элементом метрического пространства S с метрикой d, $a_i = a_i[\sigma]$, причем $|||a_i[\sigma_2] - a_i[\sigma_1]||| \leqslant Cd(\sigma_1, \sigma_2)$, $|||a_i[\sigma]||| \leqslant \leqslant C$, $\varepsilon_0 \leqslant a_0[\sigma]$, $\varepsilon_0 \leqslant a_1[\sigma]$, $i = 0, 1, 2$, $\sigma, \sigma_i \in S$. Тогда аналогично лемме 1 может быть доказано утверждение.

Лемма 2. Для каждого $\sigma \in S$ существует решение $u[\sigma]$ задачи (2), обладающее свойствами

$$\|u[\sigma]\|_{\alpha,2+\beta} \leqslant C,$$
$$\|u[\sigma_2] - u[\sigma_1]\|_{\alpha,2+\beta} \leqslant Cd(\sigma_2, \sigma_1).$$

Приведем еще одно утверждение, которое потребуется нам при получении априорной оценки решения задачи (1).

Лемма 3. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи

$$x^\alpha u_t - c_1(u_x, u, x, t)u_{xx} - c_2(u_x, u, x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$
$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(l, t) = \varphi_l(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \tag{14}$$

где $\nu \leqslant c_1(p, u, x, t) \leqslant \mu$, $|c_2(p, u, x, t)| \leqslant \mu$, $\nu, \mu = \text{const} > 0$, $|\varphi'_0(t)| + |\varphi'_l(t)| \leqslant \mu$, $\langle u'_{0x}(x)\rangle_{(0,l)}^{(\beta)} \leqslant \mu$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\varphi_0(0) = u_0(0)$, $\varphi_l(0) = u_0(l)$.

Если $|u_x(x,t)| \leqslant \mu$, то существуют константы β и B, такие, что

$$\langle u_x \rangle^{(\beta)}_{x,\bar{Q}_T} + \langle u_x \rangle^{(\beta/2+\alpha)}_{t,Q_T} \leqslant B. \tag{15}$$

Доказательство. Определим весовые нормы функций $v(x, t)$ заданных в цилиндре Q_T:

$$\|v\|^2_{\alpha,2,Q_T} \equiv \int_0^T dt \int_\Omega x^{-\alpha} v^2(x,t)\,dx, \tag{16}$$

$$|v|^2_{\alpha,Q_T} \equiv \max_{t\in[0,T]} \|v(x,t)\|^2_{2,\Omega} + \|v_x\|^2_{\alpha,2,Q_T}.$$

Будем говорить, что функция $v(x,t) \in \mathfrak{B}^\alpha_2(\bar{Q}_T, \mu, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ (ср. [5, гл. II, § 7, 8]), если $|v|^2_{\alpha,Q_T} + \operatorname{vrai}\max\limits_{Q_T} |v| \leqslant M$ и функции $w(x,t) = \pm v(x,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau} \|w^{(k)}(x,t)\|^2_{2,\Omega_{\rho-\sigma_1\rho}} \leqslant \|w^{(k)}(x,t_0)\|^2_{2,\Omega_\rho} + \gamma\left[(\sigma_1\rho)^{-2}\|w^{(k)}\|^2_{\alpha,2,Q(\rho,\tau)} + \right.$$
$$\left. + \mu^{\frac{2}{r}(1+\varkappa)}(k,\rho,\tau)\right], \tag{17}$$

$$|w^{(k)}|^2_{(\alpha,\,Q(\rho-\sigma_1\rho,\tau-\sigma_2\tau)} \leqslant \gamma\left\{[(\sigma_1\rho)^{-2} + (\sigma_2\tau)^{-1}\|w^{(k)}\|^2_{2,Q(\rho,\tau)} + \mu^{2/r(1+\varkappa)}(k,\rho,\tau)\right\}, \tag{18}$$

в которых

$$w^{(k)}(x,t) = \max\{w-k;\ 0\}, \quad Q(\rho,\tau) = \Omega_\rho \times (t_0, t_0+\tau),$$
$$\Omega_\rho = \Omega \cap K_\rho, \quad \Omega = [0, l], \quad K_\rho = \{x : |x - x_0| < \rho\};$$

ρ, τ — произвольные положительные числа; σ_1 и $\sigma_2 \in (0, 1)$; $A_{k,\rho}(t)$ — множество точек x из Ω_ρ, в которых $w > k$, $\mu(k,\rho,\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \left[\int_{A_{k,\rho}(t)} x^{-\alpha} dx\right]^{r/q}$, γ, q, r, δ, $\varkappa$ — фиксированные положительные числа, $1/r + 1/2q = 1/4$, $r \geqslant 4$, $q > 2$, k — произвольное число, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{vrai}\max_{Q(\rho,\tau)} w(x,t) - k \leqslant \delta.$$

Покажем теперь, что производная решения задачи (14) $u_x(x, t)$ принадлежит классу $\mathfrak{B}^\alpha_2(\bar{Q}_T, \mu, \gamma, 6, \infty, 2)$ (ср. [5, гл. VI, § 5]). В обозначениях [5, гл. VI, § 5], после умножения уравнения в (14) на $x^{-\alpha}(u_x^{(k)}\zeta^2)_x$ и некоторых преобразований получаем

$$\int_{\Omega_\rho} (u_x^{(k)}\zeta)^2 dx \Big|_{t_0}^{t} + \nu \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_\rho} x^{-\alpha}(u_{xx}^{(k)}\zeta)^2 dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_\rho} (u_x^{(k)})^2 (x^{-\alpha}\zeta_x^2 + \zeta|\zeta_t|)\,dxdt + \int_{t_0}^{t} dt \int_{A_{k,\rho}(t)} x^{-\alpha} dx\right]. \tag{19}$$

Аналогичные неревенства справедливы и для функций $(-u_x^{(k)})$. Из (19) путем надлежащего выбора $\zeta(x, t)$ легко получить неравенства (17) и (18), что вместе с предположением $|u_x| \leqslant \mu$ и дает принадлежность $u_x(x, t)$ указанному классу.

Доказательство того, что функции из класса $\mathfrak{B}^\alpha_2(\bar{Q}_T, \mu, \gamma, r, \delta, \varkappa)$ удовлетворяют условию Гельдера, проводится по схеме, указанной в [5], со следующими изменениями.

Во-первых, вместо (3.7) из [5, гл. II, § 3] необходимо использовать неравенство

$$\|u\|_{\alpha,2,Q_T} \leqslant \beta\left(\int_{\tilde{Q}_0} x^{-\alpha} dxdt\right)^{\delta_1} |u|_{\alpha,Q_T}, \quad \delta_1 > 0,$$

которое получается таким же путем, как и в [5], из неравенства

$$\|u\|_{\alpha,q} \leqslant C\|u\|_2^{1-\gamma}\|u_x\|_{\alpha,2}^{\gamma}, \quad \gamma \in (0, 1),$$

где $\|u\|_{\alpha,q} \equiv \left[\int\limits_{\Omega} x^{-\alpha}|u|^q\,dx\right]^{1/q}$.

Во-вторых, вместо стандартных цилиндров в [5] $Q_\rho = \Omega_\rho \times [t_0, t_0 + \theta\rho^2]$ используются цилиндры вида $Q_\rho^\alpha \equiv \Omega_\rho \times [t_0, t_0 + \theta'\rho^2(x_0+\rho)^\alpha]$. При этом всюду в формулировках лемм 7.1—7.3 из [5, гл. II] выражение ρ_0^{n+2} ($\sim$ мера стандартного цилиндра Q_ρ) заменяется на $\rho_0^{n+2}(x_0 + \rho)^\alpha$ ($\sim$ мера цилиндра Q_ρ^α).

Таким образом, для функций $v(x, t)$ из рассматриваемого класса получаем оценку

$$\operatorname{osc}\{v, Q_\rho^\alpha\} \leqslant C\rho^\beta, \quad \beta \in (0, 1),$$

откуда $\langle u_x\rangle_{x,\bar Q_T}^{(\beta)} + \langle u_x\rangle_{t,\bar Q_T}^{(\beta/2+\alpha)} \leqslant B$. Лемма доказана.

3. Разрешимость задачи Стефана в малом по времени. Введем функции $\sigma(t) \equiv \rho(t) - s(t)$, $s(t) \equiv \rho'(0)\,t$, $\rho'(0) \equiv c_2 u_{02}'(0) - c_1 u_{01}'(0)$, $v_i \equiv u_i - u_{0i}$ и представим соотношения (1) в виде

$$x^\alpha b_{iv_i}(x, t)\frac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla_{1+\sigma}^2 v_i = f_i(\sigma, v_i) \equiv \nabla_{1+\sigma}^2 u_0 -$$

$$- x^\alpha h_{s+\sigma} b_{iv_i}(x, t)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right), \tag{20}$$

$$v_i(l_i, t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(0) \equiv \Psi_i(t), \quad v_i(0, t) = 0, \quad v_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma(0) = 0, \quad \frac{d\sigma}{dt} = c_2\frac{\partial v_2}{\partial x}(0, t) - c_1\frac{\partial v_1}{\partial x}(0, t). \tag{21}$$

Пусть $\gamma_1 = \max\frac{\beta_i}{q_i}$, $\gamma_2 = \min\frac{1+\beta_i}{q_i}$ $\left(\text{поэтому } \gamma_1 < \frac{1}{3} < \gamma_2 \text{ при } \beta_i < \alpha_i < 1\right)$, M_r — шар в пространстве $\overset{0}{C}{}^{1+\gamma_1}([0, T])$, $0 < T \leqslant T_0$. Определим оператор P, для которого каждой функции $\sigma(t) \in M_r$ ставится в соответствие функция $P_\sigma(t)$ по формуле

$$P_\sigma(t) = \int\limits_0^t\left[c_2\frac{\partial v_2}{\partial x}(0, \tau) - c_1\frac{\partial v_1}{\partial x}(0, \tau)\right]d\tau,$$

где $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ — решения задачи (20) при выбранной $\sigma(t)$. Таким образом, неподвижная точка оператора P совместно с соответствующими функциями $u_i(x, t)$ удовлетворяет задаче (1). Легко понять, что коэффициенты уравнения задачи (20) главным образом зависят от σ, поэтому из леммы 2 и неравенства (11) следует, что

$$P_\sigma \in \overset{0}{C}{}^{1+\gamma_2}([0, T]), \quad |P_\sigma|_{[0,T]}^{(1+\gamma_2)} \leqslant C(r),$$

$$|P_\sigma|^{(1+\gamma_1)} \leqslant CT^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}|P_\sigma|^{(1+\gamma_2)} \leqslant C(r)\,T^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}, \tag{22}$$

$$|P_{\sigma_2} - P_{\sigma_1}|^{(1+\gamma_1)} \leqslant CT^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}|P_{\sigma_2} - P_{\sigma_1}|^{(1+\gamma_2)} \leqslant C(r)\,T^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}|\sigma_2 - \sigma_1|^{(1+\gamma_1)}.$$

Неравенства (22) означают, что P — сжимающее отображение на M_r при $T \leqslant T_0(A_1, \sigma_1, m_1, \varepsilon_1)$.

Теорема 2. При сделанных в п. 1 предположениях и $T \leqslant T_0$ задача (1) имеет единственное решение, причем $\rho(t) \in C^{1+\gamma_2}([0, T])$, $u_i \in H_{\alpha_i}^{2+\beta_i, \frac{2+\beta_i}{q_i}}$.

4. Разрешимость задачи Стефана (1) в целом по времени. В п. 5 будет приведено доказательство следующей теоремы, содержащей априорную оценку решения задачи (1). Напомним определение некоторых констант:

$$0 < m_1 = \min_{\substack{|x| \geqslant \delta_1, \\ i=1,2}} |u_{0i}(x)|,$$

$$0 < \varepsilon_1 = \min_{\substack{|x| \leqslant \delta_1, \\ i=1,2}} |u'_{0i}(x)|, \quad |\delta_1| < \min\{l_1, l_2\}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены предположения п. 1 о начальных и граничных данных и коэффициентах исходной задачи Стефана (1). Тогда для классического решения этой задачи $\left(\rho \in C^{1+\gamma_2}, u_i \in H_{\alpha_i}^{2+\beta_i, \frac{2+\beta_i}{q_i}},\right.$ $\left.\gamma_2 = \min_i \frac{1+\beta_i}{q_i}\right)$ при любом $T > 0$ существуют константы m_2, ε_2, δ_2, A_2, зависящие только от T, δ_1, m_1, ε_1, такие, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(x, t) \geqslant \varepsilon_2, \quad |x| \leqslant \delta_2, \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

$$|u_i(x, t)| \geqslant m_2, \quad |x| \geqslant \delta_2, \quad i = 1, 2, \tag{24}$$

$$\|u_i\|_{\alpha_j}^{2+\beta_i} \leqslant A_2, \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

$$|\rho|_{[0,T]}^{(1+\gamma_2)} \leqslant A_2. \tag{26}$$

Наличие априорных оценок (23) — (26) позволяет продолжить полученное в п. 3 локальное по времени решение на весь интервал $[0, T]$. Действительно, интервал $[0, T]$ существования решения в теореме 2 определяется только величинами A_1, δ_1, m_1, ε_1. Поэтому из оценок (23) — (26) следует, что если единственное решение задачи (1) существует на некотором интервале времени $[0, t_0]$, $t_0 \in [0, T]$, то оно существует также на интервале $[0, t_0 + T_1]$, где T_1 не зависит от t_0, а определяется только величинами A_2, δ_2, m_2, ε_2, если величину ε_0 в определении $\chi(x)$ в п. 1 взять равной $\varepsilon_0 = \frac{m_2}{2A_2}$, что гарантирует $(1 + \chi'(x)\rho(t)] \geqslant \varepsilon_2 > 0$. Тем самым теорема 1 доказана.

5. Априорные оценки. При сделанных в п. 1 предположениях о данных задачи (1) из леммы 3 работы [2] фактически следует оценка (см. также [4])

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant A_2, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T^{(i)}. \tag{27}$$

Тогда из условия Стефана в задаче (1) при $x = 0$ вытекает оценка

$$|\rho'(t)| \leqslant A_2, \quad t \in [0, T]. \tag{28}$$

Рассмотрим на $Q_T^{(1)}$ вспомогательную функцию $w(x) = -\varepsilon(e^{-Kx} - 1)$, где положительные константы ε и K выберем из условий

$$L_1(u_1, \rho)(u_1 - w) = -L_1(u_1, \rho)w \leqslant 0, \tag{29}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w(x) \geqslant u_{01}(x), \quad w(-l_1) \geqslant -m_1. \tag{30}$$

Тогда имеем $-L_1(u_1, \rho)w = -\varepsilon K e^{-Kx}[b_1(u_1)h_\rho + K/(1 + \chi'\rho)^2 + \rho\chi''/(1 + \rho\chi')^3]$. При этом из оценки (28) следует ограниченность $b_1(u_1)h_\rho$, а из (27) — что $-l_1 + \delta \leqslant \rho(t) \leqslant l_2 - \delta$, $t \in [0, T]$, и поэтому функция $\chi(x)$ может быть выбрана так, что будут выполняться условия $1 + \chi'(x)\rho(t) \geqslant \varepsilon_2 > 0$. Следовательно, выбирая K достаточно большим, можно добиться удовлетворения условию (29). Выбирая теперь ε достаточно малым, легко достичь удовлетворения условиям (30), так как при малых ε $|w'(x)| < |u'_{01}(x)|$, $x \in [-\delta_1, 0]$. Из принципа максимума следует, что $u_1(x, t) \leqslant -\varepsilon(e^{-Kx} - 1)$, $(x, t) \in \overline{Q}_T^{(1)}$, причем константы ε и K зависят только от ε_1, m_1, δ_1, A_1. Аналогичная оценка имеет место и в области $\overline{Q}_T^{(2)}$: $\varepsilon(e^{Kx} - 1) \leqslant u_2(x, t)$. Отсюда следует, во-первых, неравенство (24) с некоторыми δ_2 и m_2, и, во-вторых,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(0, t) \geqslant \varepsilon K > 2\varepsilon_2. \qquad (31)$$

Кроме того, из последних оценок и из (27) вытекает

$$\varepsilon_2 \leqslant \left| \frac{u_i(x, t)}{x} \right| \leqslant A_2, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T^{(i)}, \qquad (32)$$

с некоторыми ε_2 и A_2, зависящими только от данных задачи (1). Таким образом, функции $u_i(x, t)$ удовлетворяют в $Q_T^{(i)}$ уравнениям вида

$$|x|^{\alpha_i} u_t - c_{1i}(u_x, u, x, t) u_{xx} - c_{2i}(u_x, u, x, t) = 0, \qquad (33)$$

где, например, $c_{1i}(u_x, u, x, t) = |x|^{\alpha_i}/b_i(u)(1 + \chi'\rho)^2$, так что из определения $b_i(u)$ и (32) следует

$$\nu \leqslant c_{1i}(u_x, u, x, t) \leqslant \mu, \quad |c_{2i}(u_x, u, x, t)| \leqslant \mu.$$

Применяя теперь лемму 3, получаем

$$|u_{ix}|_{\bar{Q}_T^{(i)}}^{(\beta, \beta/2+\alpha_i)} \leqslant B, \qquad (34)$$

откуда с учетом (25) немедленно следует (23).

Теперь мы можем показать, что коэффициенты уравнений (33) удовлетворяют условию

$$|c_{ij}|_{\bar{Q}_T}^{(\beta_i, \beta_i/q_i)} \leqslant A_2, \quad i, j = 1, 2. \qquad (35)$$

Во-первых, из условия Стефана в (1) следует, в силу (34),

$$|\rho(t)|_{[0,T]}^{(1+\beta)} \leqslant C. \qquad (36)$$

Рассмотрим, например, $c_{1i}(u_x, u, x, t)$. При $|x| \geqslant \delta_2$ из (24), (34) и (36) имеем $|c_{1i}|^{(\beta, \beta/q_i)} \leqslant C$. Если же $|x| \leqslant \delta_2$, то аналогичная оценка вытекает из (23), (34) и представления

$$b_i(u) = g_i(u)|u|^{\alpha_i} = |x|^{\alpha_i} g_i(u) \left| \int_0^1 u_x(\theta x, t) \, d\theta \right|^{\alpha_i}.$$

Таким образом, имеет место оценка (35) с β вместо β_i. Из результатов [3] следуют оценки

$$|u_{ix}|_{\bar{Q}_T}^{\left(1+\beta, \frac{1+\beta}{q_i}\right)} \leqslant C, \quad |\rho|_{[0,T]}^{\left(1+\frac{1+\beta}{q_i}\right)} \leqslant C,$$

аналогичные (34), (36) с $(1+\beta)$ вместо β, которые дают (35) с некоторым A_2, зависящим только от данных задачи (1) на $\bar{Q}_T$. Оценки (25) и (26) снова следуют из [3]. Теорема 3 доказана.

1. *Visintin A.* The Stefan problem for a class of degenerate parabolic equations // Free boundary problems: Theory and application.— Boston : Pitman Advanced Publ. Progr. 1983.— Vol. 2.— P. 419—430.
2. *Cannon I. R., Yin H. M.* On the existence of the weak solution and the regularity of the free boundary to a one-dimensional two-phase degenerate Stefan problem // J. Diff. Equat.— 1988.— N 73.— P. 104—118.
3. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* Вырождающиеся параболические уравнения и задачи со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 1.— С. 3—7.
4. *Crowley A. B.* On the weak solution of moving boundary problem // J. Inst. Math. Appl.— 1979.— N 24.— P. 43—57.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.

Ин-т прикл. математики и механики, Донецк

Получено 22.10.90